EXERCICE I :

Calculer les intégrales suivantes : 1°) $\int_0^1 \frac{x+3}{(x+1)^4}dx$; 2°) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x \cos^2 x)dx$

EXERCICE II :

On considère un sac contenant 3 boules rouges et 6 boules vertes. On tire de ce sac une boule, on constate sa couleur, on le remet dans le sac et on tire de nouveau une boule. On désigne par x le nombre de boules rouges obtenues au bout des 2 tirages et par y le nombre de boules vertes obtenues.

1°) – Déterminer les lois de probabilité respective s de x, de y.

2°) – Déterminer l'espérance mathématique et la var iance de x et de y.

EXERCICE III :

$\mathbb{C}$ désignant le corps des nombres complexes, soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = z^3 - 3(1+i)z^2 + (3+10i)z + 3(1-3i)$

1°) Calculer les nombres complexes a, b, c pour que: $f(z) = (z - 1 - i)(az^2 + bz + c)$

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

3°) Montrer que les points images dans le plan co mplexe, des solutions de cette équation sont alignés.

EXERCICE IV :

Soit N un entier naturel tel que, en numération décimale, N s'écrive $\overline{abcd}$ et que l'entier qui s'écrit $\overline{bcda}$ soit divisible par 7.

1°) Montrer que si a = 7, alors $-10N \equiv 0 \pmod 7$; en déduire que pour cette valeur de a, N est divisible par 7.

2°) Montrer que 10N – 3a est divisible par 7 ; en déduire que si N est divisible par 7 alors a = 7.

EXERCICE V :

1°) Dresser le tableau des variations de la fonctio n numérique g définie par :

$g(x) = 1 - xe^{-x}$. En déduire que $g(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

On pose : $e^{1/2} = 1{,}65$ et $e^{3/4} = 2{,}12$.

2°) Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x + (x+1)e^{-x}$;

calculer : $f\left(-\frac{3}{4}\right)$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right)$. En déduire qu'il existe $\alpha \in \left]-\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right[$ tel que :

$f(\alpha) = 0$. (On ne cherchera pas à calculer α).

On rappelle que l'ensemble F des fonctions de ℝ vers ℝ , définies et dérivables en tout réel x , est un espace vectoriel sur ℝ; si $f \in$F, on note f' et f'' les fonctions dérivées premières et secondes de f quand f'' existe ; a et b étant deux nombres réels non nuls, on considère les fonctions f_1 et f_2 de ℝ vers ℝ définies par : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_1(x) = e^{ax}\cos(bx)$ et $f_2(x) = e^{ax}\sin(bx)$.

Soit E le sous-espace de F engendré par f_1 et f_2.

1°) Montrer que $B = (f_1 ; f_2)$ est une base de E. Dans la suite du problème, on supposera que E est un espace vectoriel euclidien dont $\mathcal{B}$ est une base orthonormée.

2°) Soit α un réel donné ; si $f \in$E, montrer que la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x+\alpha)$ est un élément de E.

On pose $\varphi_\alpha(f) = g$; on définit ainsi une application φ_α de E dans E. Calculer $\varphi_\alpha(f_1)$ et $\varphi_\alpha(f_2)$ en fonction de f_1 et f_2.

a) Montrer que φ_α est linéaire et déterminer sa matrice M_α dans la base $\mathcal{B}$.

b) En déduire que φ_α est la composée d'une homothétie vectorielle et une rotation vectorielle dont on déterminera respectivement le rapport et l'angle.

c) Soit $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$; comparer $\varphi_{\alpha+\beta}(f_1)$ et $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta)(f_1)$ ainsi que $\varphi_{\alpha+\beta}(f_2)$ et $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta)(f_2)$.

On pourra utiliser les matrices M_α et M_β. Montrer que $\varphi_{\alpha+\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta$.

3°) a) Montrer que si si $f \in$E, alors $f' \in$E. on note Φ l'application de E dans E qui à f associe f'. Montrer que Φ est une application linéaire et déterminer la matrice D dans la base $\mathcal{B}$.

b) Montrerque D est inversible et calculer D^{-1}.

Vérifier que $D^2 - 2aD + (a^2+b^2)I = O$ (où I désigne la matrice carrée d'ordre 2 et O la matrice de l'application identiquement nulle). En déduire que $\forall f \in$E, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) - 2a f'(x) + (a^2+b^2) f(x) = 0.$$

c) r étant un réel non nul, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(rx)}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^{rx} - 1}{x}$$

d) Montrer que : $\lim_{\alpha\to 0} \frac{e^{a\alpha}\cos(b\alpha) - 1}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{e^{a\alpha} - 1}{\alpha}$. Calculer la matrice $\frac{1}{\alpha}(M_\alpha - I) - D$ et montrer que chacun de ses éléments tend vers 0 quand α tend vers 0.

4°) Soient $g = r_1 f_1 + r_2 f_2$ et $f = t_1 f_1 + t_2 f_2$ deux éléments de E. Calculer t_1 et t_2 en fonction de r_1 et r_2 pour qu'on ait $g = \Phi(f)$. Déterminer alors les primitives de f_1 et f_2 dans E.

5°) n étant un entier naturel, calculer $U_n = \int_0^\pi e^{ax}\cos(nx)\,dx$ et $V_n = \int_0^\pi e^{ax}\sin(nx)\,dx$.

Calculer $\lim_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim_{n\to+\infty} V_n$.