On se place dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$. On prendra pour unité de mesure 2cm pour les figures. Soit A(1 ; 1) un point du plan.

I/ 1- Soit α un réel non nul fixé et D la droite d'équation x = α .Déterminer l'application f$_\alpha$ telle que f$_\alpha$ (O) = A et $\forall M \in D$, $\overrightarrow{Mf_\alpha(M)} = \vec{i}$.

2- Soit f l'application qui à M(x ; y) associe le point M'(x' ; y') telles que : $\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = x+y+1 \end{cases}$.

Montrer que f est une application f_α (α = 1). Montrer que f est bijective.

f a- t – elle des points invariants ?

1- a) Vérifier que $\forall \lambda \in IR$, les vecteurs $(\vec{i} + \lambda\vec{j})$ et $\varphi(\vec{i}+\lambda\vec{j})$ forment une base du plan vectoriel associé au plan affine ; φ étant l'endomorphisme associé à f.

b) Soit Δ une droite affine du plan affine, donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit parallèle à f(Δ).

4- Déterminer l'image f(Δ). de Δ dans les cas suivants :

a) Δ est la droite d'équation x = k ; montrer que si $M \in \Delta$, $\overrightarrow{Mf(M)}$ est un vecteur constant que l'on déterminera.

b) Δ est la droite d'équation : y = k'.

c) Δ a pour équation : y = tx. Quelles sont les coordonnées de $\Delta \cap f(\Delta)$.en fonction de t ? On note P le point de $\Delta \cap f(\Delta)$. Déterminer l'ensemble (π .) des points P quand t décrit IR. Représenter π .

Tracer les droites Δ et f(Δ) dans les cas où Δ a pour équation : x = 1 ; y = –1 ; y = –2x.

5 - On appelle M_0 l'origine du repère. Soit $M_1 = f(M_0)$ et $\forall$ n$\in$ IN*, $M_n = f(M_{n-1})$; $(x_n ; y_n)$, les coordonnées de M_n Calculer $(x_1 ; y_1)$; $(x_2 ; y_2)$; $(x_3 ; y_3)$. Exprimer x_n et y_n en fonction de x_{n-1} et y_{n-1} puis en fonction de *n*. Vérifier que $\forall$ n$\in$ IN, M*n* appartient à la courbe (C) d'équation :

y = $\dfrac{x(x+1)}{2}$. Tracer ($\mathcal{C}$) et les points M_0, M_1, M_2 et M_3..

6- a) Montrer que pour toute fonction g continue de IR dans IR, de primitive G :

$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} g(x)dx = \int_{\lambda_1+1}^{\lambda_2+1} g(x-1)dx$; λ_1 et λ_2 étant des réels.

Montrer que l'image d'une courbe (Γ) d'équation $y = h(x)$ est $f(\Gamma)$ d'équation : $x = h(x-1) + x$. Quelle est l'image de la courbe ($\mathcal{C}$) du 5°/ ?

II- Soit h_0 l'application de IR dans IR telle que $h_0(x) = e^{-x} - 1$ et Γ sa courbe. Montrer que $f(\Gamma)$ a pour équation y = $h_1(x) = e^{1-x} - 1 + x$. Etudier h_0 et h_1, représenter sur une même figure (Γ) et $f(\Gamma)$.

Calculer en fonction de λ, réel supérieur à 1, l'aire A(λ) du domaine limité par les droites : x = 1 et x = λ, f(Γ) et son asymptote. Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.