BACCALAURÉAT MALIEN SESSION DE JUIN 1984

SÉRIE : S.E.T – MTI – MTGC EPREUVE DE : MATHÉMATIQUES (Composition)

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

A/ Soit E l'ensemble des matrices de la forme $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ a & b-a \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels.

On pose $I = M_{0,1}$; $J = M_{1,0}$.

1°/ Montrer que E est un sous espace vectoriel de base (I ; J) de l'espace vectoriel sur IR des matrices carrées d'ordre deux.

2°/ Calculer J2. En déduire que si $M \in E$ et $M' \in E$ alors $M.M' \in E$. Montrer que $(E ; + ; \bullet)$ est un anneau commutatif unitaire.

3°/ Quelles sont les matrices $M_{a,b}$ inversibles dans E ? Exprimer alors $M_{a,b}^{-1}$ dans la base (I ; J)

B/ Dans ce qui suit b = 0

Soit V un plan vectoriel euclidien de base orthonormée $(\vec{i} ; \vec{j})$. Soit P un plan affine euclidien d'espace vectoriel associé V ; P est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. Soit f_a l'application de P dans P dont l'endomorphisme associé a pour matrice $M_{a,0}$ dans la base $(\vec{i} ; \vec{j})$, et qui, au point O fait correspondre le point O'(0 ; a + 3).

1°/ Déterminer analytiquement f_a .

2°/ Pour quelles valeurs de a f_a est elle une bijection ? Déterminer analytiquement sa bijection réciproque lorsqu'elle existe.

3°/ Déterminer suivant les valeurs de a l'ensemble D des points invariants par f_a.

4°/ Démontrer que seule l'application f_1 est une involution que l'on caractérisera.

5°/ f_a est - elle une isométrie ?

6°/ Soit α un réel strictement positif. Soit G le barycentre des points $A(\alpha ; \alpha)$; $B(\alpha ; 2)$; $C\left(\alpha ; -\frac{2\ln\alpha}{\alpha}\right)$ affectés respectivement des coefficients 1, 2, –1. Trouver les coordonnées de G, en déduire la courbe décrite par G quand α varie.

7°/ Soient A_1, B_1, C_1 les images des points A, B, C par l'application f_1 (définie en B/4°).
Soit G_1 le barycentre du système {(A_1, 1) ; (B_1 ; 2) ; (C_1 ; -1)}.
Trouver une équation cartésienne de la courbe décrite par G_1 lorsque α varie.

C°/ Soit ($\mathcal{C}$) la courbe représentative dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ de la fonction numérique g définie sur IR_+^* par : $g(x) = \frac{x}{2} + 2 + \frac{\ln x}{x}$.

1°/ On considère la fonction h : $IR_+^* \longrightarrow IR : x \mapsto h(x) = x^2 - 2\ln x + 2$.
Etudier les variations de h et préciser le signe de h(x). (On ne demande pas de tracer sa courbe)

2°/ Etudier les variations de la fonction g. Montrer que la courbe ($\mathcal{C}$) a deux asymptotes que l'on déterminera. Montrer que ($\mathcal{C}$) coupe l'une de ces asymptotes en un point que l'on précisera.
Tracer la courbe ($\mathcal{C}$).

3°/ Soit ($\mathcal{C}_1$) la transformation de ($\mathcal{C}$) par f_1 (définie en B-4°/)

a) Ecrire une équation de ($\mathcal{C}_1$).
b) Montrer que ($\mathcal{C}$) et ($\mathcal{C}_1$) ont les mêmes droites asymptotes. Tracer ($\mathcal{C}_1$) dans le même
c) repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. que ($\mathcal{C}$) sans étudier g_1.

4°/ Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la droite d'équation x = 1,
la droite d'équation x = m (m>1) et les courbes ($\mathcal{C}$) et ($\mathcal{C}_1$).

m étant un réel, soit f_m l'application de IR dans IR définie pour tout réel x par $f_m(x) = (x + m)e^{-x}$ et $(\mathcal{C}_m)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

A/ 1) Etudier les variations de f_m. Préciser les points d'inflexion et les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_m)$.

2) Montrer que les valeurs qui annulent f_m, f'_m et f''_m forment une progression arithmétique. Soit H_m le point de $(\mathcal{C}_m)$ où la tangente est parallèle à la droite $(0\,;\vec{i})$. Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (Γ) des points H_m quand m décrit $\mathbb{R}$.

3) Ecrire une équation cartésienne D_m en un point quelconque $M_0(x_0\,;f_m(x_0))$ appartenant à $(\mathcal{C}_m)$. Montrer que pour x_0 fixé et m décrivant $\mathbb{R}$, toutes les droites D_m ont en commun un point T dont les coordonnées ne dépendent pas de m.

B/ 1) Etudier le signe de $f_{m+1}(x) - f_m(x)$. Préciser la position relative des courbes $(\mathcal{C}_0)$, $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.
On pourra utiliser les valeurs numériques approchées suivantes.

x	-1	1/2	1	2
e^{-x}	2,72	0,60	0,37	0,14

Construire les tangentes les aux courbes $(\mathcal{C}_0)$, $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.aux points d'abscisses 0 et 1.

2) Soit α un réel tel que $-m < \alpha$. Calculer l'aire $A(\alpha)$ de l'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que : $\begin{cases} -m \le x \le \alpha \\ 0 \le y \le f_m(x) \end{cases}$ $A(\alpha)$ a-t-elle une limite lorsque α tend vers $+\infty$? Si oui calculer cette limite.

C/ 1) Démontrer par récurrence sur l'entier naturel non nul n que la dérivée d'ordre n de la fonction f existe et est donnée par la relation $f_m^{(n)}(x) = (-1)^n f_{m-1}(x)$

2) λ étant un réel fixé, on pose $U_0 = f_m(\lambda)$ et $\forall n \in IN^*$, $U_n = f_m^{(n)}(\lambda)$.

Montrer que $\forall n \in IN^*$, $U_{n-1} + U_n = (-1)^{n-1}e^{-\lambda}$.

Soit $p \in IN^*$, calculer en fonction de λ, la somme $S_{2p-1} = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{2p-1}$.

En déduire la somme $S_{2p} = \sum_{i=0}^{2p} U_i$. Montrer que $S_{2p} = f_{m-p}(\lambda)$.

3) Calculer la somme $F_{2p} = U_0 + U_2 + \ldots + U_{2p} = \sum_{i=0}^{p} U_{2i}$. Montrer que $F_{2p} = (p + 1)S_{2p}$.